

Relação entre Matemática e Música

Sistematização de conteúdos segundo os Programas de Matemática do 5º ao 12º anos do Ensino Português

Relationship between Mathematics and Music

Systematization of contents according to the Programs of Mathematics from 5th to 12th-grades of Portuguese Education

Carlos dos Santos-Luiz

i2ads – Faculdade de Belas Artes, Universidade do Porto
Instituto Politécnico de Coimbra, Escola Superior de
Educação
Coimbra, Portugal
cluis@esec.pt

Lisete dos Santos Mendes Mónico

Universidade de Coimbra, Faculdade de Psicologia e de
Ciências da Educação
Coimbra, Portugal
lisete.monico@fpce.uc.pt

Carlos Fernandes da Silva

Universidade de Aveiro, Departamento de Educação
Aveiro, Portugal
csilva@ua.pt

Sandra Campelos

Colégio dos Carvalhos
Porto, Portugal
scampelos@sapo.pt

Resumo — As ligações entre matemática e música são investigadas há milhares de anos. Este artigo consta de uma sistematização das associações entre conteúdos matemáticos e conteúdos musicais. Estes últimos foram divididos em Teoria e análise musicais, Acústica e Composição musical. Consecutivamente, os conteúdos de cada temática musical foram sistematizados com base na organização dos domínios de conteúdos matemáticos do Programa de Matemática do Ensino Básico e dos temas matemáticos dos Programas de Matemática A e B do 11º e 12º anos do Ensino Secundário português. Concluímos que os conteúdos musicais estão associados às áreas da matemática concernentes à Aritmética, Álgebra, Trigonometria e, especificamente, Geometria.

Palavras Chave – matemática; música; conteúdos matemáticos; conteúdos musicais; programas de matemática.

Abstract — The connections between mathematics and music have been investigated for thousands of years. This article consists of a systematization of the associations between mathematical contents and musical contents. The latter were divided into Theory and musical analysis, Acoustics and Musical composition. Consecutively, the contents of each musical theme were systematized based on the organization of domains of mathematical contents of the Mathematics Program of Portuguese Basic Education and themes of mathematics of Mathematics Programs A and B of the 11th and 12th grades of Portuguese Secondary Education. We conclude that the musical contents are associated with the mathematical areas of Arithmetic, Algebra, Trigonometry, and specifically geometry.

Keywords – mathematics; music; mathematical contents; musical contents; mathematics programs.

I. INTRODUÇÃO

A afinidade entre música e matemática é muito antiga [1, 2, 3] e pode ser encontrada desde o tempo de Pitágoras [2]. Apesar da música e da matemática estarem relacionadas [4], as ligações não surgem na música em geral mas, principalmente, entre determinados conteúdos matemáticos e musicais na esfera da teoria musical [5].

A música grega teve um papel importante na evolução da matemática pura. Pitágoras, na sua época, foi um representante da relação entre matemática e música, tendo protagonizado as experiências efetuadas no monocórdio. A construção da escala musical de Pitágoras e a sua relação com as razões perfeitas entre números naturais foi crucial [6]. Porém, no final da Idade Média, esta perspetiva foi perdendo relevância à medida que a música se foi tornando mais complexa [4].

Matemática e música têm interagido até ao presente [2]. No decurso do século XX, a linguagem musical foi matematizada, surgindo ideias matemáticas usadas pelos compositores como ferramentas básicas, desde a linha dodecafônica de A. Schoenberg e os quadrados mágicos de P. M. Davies até ao uso da teoria dos grupos, fractais e superfícies geodésicas por I. Xenakis [7, 8].

Este artigo tem por objetivo coligar ligações entre conteúdos musicais e conteúdos da matemática e sistematizá-los de acordo com os Programas de Matemática dos ensinos Básico (3º ciclo) e Secundário portugueses.



II. OPÇÕES METODOLÓGICAS

A identificação das relações entre conteúdos musicais e matemáticos fez-se por meio de pesquisa de literatura científica centrada na musicologia histórica e sistemática que permitisse revelar essas ligações e, conseqüentemente, enquadrá-las em temáticas musicais.

De seguida, sistematizaram-se estas relações organizando-as segundo os domínios de conteúdos matemáticos do Programa de Matemática do Ensino Básico (3º ciclo) [9] e os temas matemáticos dos Programas de Matemática A e B do 11º e 12º anos do Ensino Secundário português [10, 11, 12, 13].

III. RESULTADOS

Na presente secção, os conteúdos da música foram divididos pelas temáticas de Teoria e análise musicais, Acústica e Composição musical. Em cada uma, apresentamos a síntese da relação entre conteúdos musicais e matemáticos.

A. Teoria e Análise Musicais/ Domínios de Conteúdos Matemáticos

No que se refere à teoria e análise musicais, os vínculos entre conteúdos musicais e da matemática são:

- a) Os intervalos musicais estão associados a relações numéricas e proporções [2, 4, 14, 15, 16, 17, 18] e a operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) [6, 14, 15, 17, 18]. Os domínios de conteúdos matemáticos enquadram-se nos Números e operações e na Álgebra.
- b) Os acordes ligam-se com as relações numéricas e proporções [4, 8]. Os domínios de conteúdos matemáticos inserem-se nos Números e operações e, também, na Álgebra.
- c) A harmonia relaciona-se com os múltiplos inteiros [4] e com as relações numéricas e proporções [2, 4, 8, 15, 17]. Os domínios de conteúdos matemáticos enquadram-se nos Números e operações e na Álgebra.

Num exame relativo à natureza da representação simbólica e padrão, é visível a analogia estrutural entre música e matemática. Um músico, ao tocar com base numa partitura, exerce a função de reconhecer símbolos próprios. De modo semelhante, a tarefa fundamental da matemática consiste na representação de padrões e relações por meio de um conjunto de símbolos personalizados [19]. A ligação entre conteúdos da matemática e musicais evidencia-se do modo seguinte:

- a) O tempo associa-se com relações numéricas, proporções racionais e proporção irracional/proporção dourada [15]. Os domínios de conteúdos matemáticos inserem-se nos Números e operações e, igualmente, na Álgebra.
- b) A duração das notas (figuras musicais)/sons relaciona-se com múltiplos inteiros, relações numéricas [20], proporções [18] e com operações aritméticas nas notas (multiplicação e divisão) [17], notas e pausas (adição, multiplicação e divisão), tercina (divisão) e ligaduras de prolongação (adição) [18]. Os domínios de

conteúdos matemáticos enquadram-se nos Números e operações e na Álgebra.

- c) Os compassos ligam-se a relações numéricas [21]. O domínio de conteúdos matemáticos encontra-se no âmbito dos Números e operações.
- d) O ritmo associa-se com relações numéricas e proporções [15]. Os domínios de conteúdos matemáticos enquadram-se nos Números e operações e, igualmente, na Álgebra.

B. Acústica/ Domínios de Conteúdos e Tema Matemáticos

A acústica musical recorre à física e à matemática para abordar com rigor muitas das suas temáticas [16]. Quanto às ligações entre conteúdos musicais e matemáticos refira-se o seguinte:

- a) Os intervalos musicais associam-se a logaritmos [14, 17, 18] e a exponenciais [18] e, ainda, aos números racionais nas escalas Pitagórica e Natural, aos números racionais e irracionais nas escalas temperadas (Mesotónica e Temperamento igual) [14, 18] e ao trítone [8]. O domínio de conteúdos e tema matemáticos inserem-se nos Números e operações e nas Funções, respetivamente.
- b) As escalas Pitagórica, Natural e Mesotónica ligam-se com as relações numéricas e proporções [2, 4, 15, 16, 17, 18]. Os domínios de conteúdos matemáticos enquadram-se nos Números e operações e na Álgebra.
- c) A nota musical/som/frequência/altura do som liga-se com múltiplos inteiros [2, 14, 17], operações aritméticas na Escala do Temperamento igual (multiplicação e divisão) [17], funções trigonométricas [2, 18] e logaritmos [14, 18, 22, 23]. O Domínio de conteúdos e tema matemáticos inserem-se, respetivamente, nos Números e operações e nas Funções.
- d) A intensidade/sensação de intensidade relaciona-se com os logaritmos [14, 16, 22, 23]. O tema matemático inclui-se nas Funções.
- e) O timbre associa-se a funções trigonométricas [2, 18]. O tema matemático encontra-se no âmbito das Funções.

C. Composição Musical/ Domínios de Conteúdos Matemáticos

Na composição musical a matemática pode assumir um papel importante. Aspetos puramente musicais de determinadas obras podem ser descritos segundo princípios matemáticos. Como exemplo, referimos a técnica de transposição aplicada a um determinado padrão musical. Noutras situações, as técnicas matemáticas foram usadas de forma explícita nas composições musicais [2]. O primeiro compositor que aplicou de forma evidente a matemática na composição musical foi A. Schoenberg, por meio do dodecafonismo [24]. As ligações entre conteúdos musicais e matemáticos podem ser identificadas do modo seguinte:

- a) Os padrões musicais (“frisos”) e os motivos musicais classificados pelas suas simetrias, assim como as séries de 12 sons, associam-se a padrões geométricos [2, 8, 14, 18,

- 19, 25, 26, 27]. O domínio de conteúdos matemáticos insere-se na Geometria e medida.
- b) A simetria em música relaciona-se com os fenómenos de transformação (transposição, retrogradação e inversão) [2, 8, 18, 20, 25, 27, 28] e de repetição de secções (forma musical) [14, 18, 25], associando-se à translação, reflexão e rotação em matemática. O domínio de conteúdos matemáticos inclui-se na Geometria e medida.
- c) O conceito matemático do número de ouro pode ser encontrado na composição musical, por exemplo, em divisões formais e no desenvolvimento de uma linha melódica [1, 15, 29]. O domínio de conteúdos matemáticos enquadra-se na Álgebra.

IV. CONCLUSÕES

Com este artigo procurou-se apresentar a ligação entre matemática e música, nomeadamente, a associação de conteúdos matemáticos a conteúdos musicais. No âmbito musical, esta associação foi identificada ao nível da Teoria e análise musicais, Acústica e Composição musical e, no seio da matemática, enquadra-se nas áreas da Aritmética, da Álgebra, da Trigonometria e, de modo evidente, da Geometria. Entre vários compositores férteis em ideias geométricas refira-se J. Desprez, J. S. Bach, L. van Beethoven, B. Bartók e A. Schoenberg [25].

Não obstante as limitações inerentes a uma investigação de natureza qualitativa, este estudo pretendeu ser mais um contributo no que toca à sistematização entre conteúdos matemáticos e musicais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] T. H. Garland and C. V. Kahn, *Math and Music: Harmonious Connections*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1995.
- [2] L. Harkleroad, *The Math Behind the Music*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006.
- [3] J. S. Walker and G. W. Don, *Mathematics and Music: Composition, Perception, and Performance*. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2013.
- [4] M. Beer, "Mathematics and music: Relating science to arts?," *Math. Spec.*, vol. 41(1), pp. 36–42, 2008.
- [5] T. Bahna-James, "The relationship between mathematics and music: Secondary school student perspectives," *J. Negro Educ.*, vol. 60(3), pp. 477–485, 1991.
- [6] J. F. Rodrigues, "A matemática e a música numa perspectiva histórica," in *Encontro Música e Matemática – Actas*, H. M. Matos and J. N. Tavares, Coords. Porto, Portugal: Centro de Matemática da Universidade do Porto, 2006, pp. 147–171.
- [7] J. Cross, "Composing with numbers: Sets, rows and magic squares," in *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals*, J. Fauvel, R. Flood, and R. Wilson, Eds. Oxford, UK: Oxford University Press, 2006, pp. 131–146.
- [8] E. Rothstein, *Emblems of Mind: The Inner Life of Music and Mathematics*. Chicago, IL: The University of Chicago Press, 2006.
- [9] J. P. Ponte, L. Serrazina, H. M. Guimarães, A. Breda, F. Guimarães, H. Sousa, and P. A. Oliveira, *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, 2007.
- [10] J. C. Silva (Coord.), M. G. Fonseca, A. A. Martins, C. M. C. Fonseca, and I. M. C. Lopes, *Matemática A 11º ano: Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 2002a.
- [11] J. C. Silva (Coord.), M. G. Fonseca, A. A. Martins, C. M. C. Fonseca, and I. M. C. Lopes, *Matemática B 11º ano: Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais, Cursos Tecnológicos de Construção Civil e Edificações, de Electrotecnia e Electrónica, de Informática, de Administração, de Marketing e de Desporto*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 2002b.
- [12] J. C. Silva (Coord.), M. G. Fonseca, A. A. Martins, C. M. C. Fonseca, and I. M. C. Lopes, *Matemática A 12º ano: Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 2002c.
- [13] J. C. Silva (Coord.), M. G. Fonseca, A. A. Martins, C. M. C. Fonseca, and I. M. C. Lopes, *Matemática B 12º ano: Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais, Cursos Tecnológicos de Construção Civil e Edificações, de Electrotecnia e Electrónica, de Informática, de Administração, de Marketing e de Desporto*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 2002d.
- [14] D. J. Benson, "Music: A mathematical offering," *Math. Intell.*, vol. 30(1), pp. 76–77, 2008.
- [15] M. P. Ferreira, "Proporções na música da Antiguidade e Medieval," *R Educ Musical*, vols. 121–123, pp. 5–23, 2005.
- [16] L. Henrique, *Acústica Musical*, 5ª ed. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian, 2014.
- [17] F. P. Miller, A. F. Vandome, and J. McBrewster (Eds.), *Music and Mathematics*. Mauritius, Republic of Mauritius: Alphascript Publishing, 2010.
- [18] D. Wright, *Mathematics and Music*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2009.
- [19] N. Bahr and C. A. Christensen, "Inter-domain transfer between mathematical skill and musicianship," *J. Struct. Learn. Intell. Sys.*, vol. 14(3), pp. 187–197, 2000.
- [20] B. Scimemi, "Contraponto musical e transformações geométricas," *R Cult Cient.*, vol. 24, pp. 60–68, 1999.
- [21] S. Nisbet, "Mathematics and music," *T. Austral. Math. Teacher*, vol. 47(4), pp. 4–8, 1991.
- [22] F. A. Everest and K. C. Pohlmann, *Master Handbook of Acoustics*, 6th ed. New York, NY: McGraw-Hill, 2015.
- [23] D. M. Howard and J. Angus, *Acoustics and Psychoacoustics*, 4th ed. Oxford, UK: Focal Press, 2009.
- [24] C. Lima, "Criatividade musical versus técnicas matemáticas?," in *Encontro Música e Matemática – Actas*, H. M. Matos and J. N. Tavares, Coords. Porto, Portugal: Centro de Matemática da Universidade do Porto, 2006, pp. 45–63.
- [25] W. Hodges, "The geometry of music," in *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals*, J. Fauvel, R. Flood, and R. Wilson, Eds. Oxford, UK: Oxford University Press, 2006, pp. 91–112.
- [26] C. Simões, "A ordem dos números na música do séc. XX," *R. Cult. Cient.*, vol. 24, pp. 48–59, 1999.
- [27] C. Simões, "Padrões matemáticos na obra de Mozart," in *Encontro Música e Matemática – Actas*, H. M. Matos and J. N. Tavares, Coords. Porto, Portugal: Centro de Matemática da Universidade do Porto, 2006, pp. 64–76.
- [28] C. Simões, "A reorganização do som no século XX," in *Actas do Encontro ProfMat 2004*. Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática, 2004, pp. 5–11.
- [29] N. L. Harper, "Golden section in the sonatas of Domenico Scarlatti: An examination of Kirkpatrick's crux," in *Proceedings of the International Symposium on Performance Science 2007*, A. Williamson and D. Coimbra, Eds. Utrecht, The Netherlands: European Association of Conservatoires (AEC), 2007, pp. 239–244.

